CM2-ACP17-problèmes de proportionnalité simple : utiliser les rapports entre lignes ou entre colonnes dans les tableaux (type II) Guide pédagogique

Objectifs :
- Réinvestir la mise en tableaux des problèmes en y variant les places des données
- S'approprier que si deux grandeurs d'un même domaine sont dans un rapport les deux grandeurs de l'autre domaine sont dans le même rapport.
- Distinguer les deux sortes de rapports : entre grandeurs de même nature et entre grandeurs de nature différente
- Utiliser ces rapports pour résoudre les problèmes de façons différentes
- Comparer ces différentes procédures pour pouvoir choisir le rapport le plus simple à calculer.

Eclairage didactique

Précédemment, nous avons continué d'étudier les problèmes multiplicatifs comme des situations de proportionnalité simple en apprenant à les représenter dans des tableaux. Nous poursuivons ce travail en demandant aux élèves d'utiliser ces tableaux pour les résoudre : différentes procédures sont possibles selon les rapports utilisés, le but étant de leur apprendre à choisir les rapports les plus « simples » pour faire leurs calculs.

Exemple : Lola achète 5 roses. Chaque rose coute 3 €. Combien a-t-elle dépensé ?

Nombre de roses	**Prix en euros**
1	3
5	15

1 et 3 : concernent des grandeurs de nature différente : *des roses et des euros*

5 et 15 : concernent des grandeurs de nature différente : *des roses et des euros*

Même domaine :
1 et 5 : concernent des grandeurs de même nature : *des roses.*

Même domaine :
3 et 15 : concernent des grandeurs de même nature : *des euros.*

Stratégie d'aide à conseiller aux élèves : d'abord remplir le tableau et pour cela :
1. Identifier les deux grandeurs et les nombres mis en relation (le nombre de roses et le prix en euros)
2. Compléter la première ligne avec le premier couple de nombres « 1 » (chaque rose) et « **3 »** (coûte 3 euros)
3. Compléter la deuxième ligne avec le deuxième couple de nombres : « **5 »** (Lola achète 5 roses) et « **? »** (Combien a-t-elle dépensé ?)
4. Calculer le rapport de comparaison multiplicative (5) entre les nombres d'un même domaine de grandeur
5. Calculer le rapport multiplicatif entre les nombres des deux domaines de grandeur (3) : c'est le coefficient de proportionnalité ou le coefficient de la fonction linéaire correspondante.

L'exemple proposé ici correspond à la fonction f telle que f(a) = 3 x a.
L'utilisation du coefficient de proportionnalité (x 3) est plus difficile que celle du rapport de comparaison multiplicative entre grandeur de même nature (x 5).

Les situations de proportionnalité simple continueront d'être étudiées et complétées au collège. Par exemple, l'utilisation de la règle de trois n'est pas attendue ni intéressante à l'école primaire : le but est de favoriser **la compréhension de cette proportionnalité.**

Une aide pour comprendre les différentes résolutions possibles

A chaque situation de proportionnalité correspond une « fonction » dite « linéaire » car la représentation graphique de cette fonction est une droite.

2 types de résolutions avec le tableau	*Résolution avec la fonction linéaire correspondante*

x 3

Nombre de roses	Prix en euros
1	3
5	?

x 5 x 5

x 3

Chemin vertical
3 x 5 = 15
5 roses, c'est **5 fois plus** de roses que 1 rose, donc le prix de 5 roses est **5 fois plus** grand que celui de 1 rose.

Chemin horizontal
5 x 3 = 15
Il y a une relation entre le nombre de roses et le nombre d'euros, la relation **x 3**

x 3

1	3
2	6
3	9
4	12
5	15
a	f(a)

f

La fonction f relie le nombre de roses (a) au nombre d'euros par la relation

f(a) = a **x 3**

D'où :
f(1) = 3, f(2) = 6,
f(3) =9, f(4) = 12, f(5) = 15 etc.…

Cette fonction a des propriétés de linéarité :

- Propriétés additives

Par exemple ▸ f(1+2) = f(1) + f(2)
f(3) = 3 + 6 = 9

- Propriétés multiplicatives

Par exemple ▸ f(5 x 1) = 5 x f(1)
f(5) = 5 x 3 = 15

*<u>Dans les fiches élèves</u>, les **flèches noires** correspondent au rapport de comparaison entre grandeurs d'un même domaine (celles qui sont bleues dans le schéma ci-dessus), les **flèches blanches** correspondent au coefficient de proportionnalité ou au rapport de la fonction linéaire entre les deux domaines (celles qui sont rouges dans le schéma ci-dessus).*

Déroulement

Phase 1 : travail à partir de la consigne 1
Laisser les élèves observer les schémas et lire les énoncés puis compléter les tableaux. Ce travail peut se faire en binômes, voire en groupes de 3 à 4. La tâche consiste à bien identifier les 2 domaines en fonction de la question, à trouver où mettre le 1 et le ? dans le tableau avant de choisir le sens du calcul à faire.

Phase 2
Instaurer un débat à partir des hypothèses proposées par les élèves (en individuel ou en groupe) pour compléter les tableaux et calculer les rapports. Attention, les élèves doivent expliciter leurs procédures et justifier le choix des indices retenus.
On peut poser des questions du type :
« *Que représente chaque nombre dans l'énoncé ?* » (référence aux grandeurs)
« *Comment l'information concernant le « 1 » est-il écrit dans l'énoncé ?* » (Faire un affichage avec les différentes manières de dire le « 1 » dans les énoncés : « par-chaque-chacun-chacune-un-une- …)
« *Quel calcul permet de passer d'une ligne à une autre ?* » ou « *Quel calcul permet de passer d'une colonne à l'autre ?* »
« *Que représente, le « ? » du tableau dans l'énoncé ?* »

Leur faire expliciter comment ils effectuent les calculs et leur faire repérer que les procédures sont équivalentes. Les conduire à réaliser que dans certains cas on choisira une méthode de résolution plutôt qu'une autre en fonction de la facilité du calcul du rapport.

Phase 3 : travail à partir de la consigne 2
Comme en phase 1, laisser les élèves observer les schémas et lire les énoncés puis compléter les tableaux. Puis instaurer un débat. Le débat sera mené comme dans la phase 2.

L’accent sera mis sur les différentes places du « ? » dans les tableaux : on pourra faire remarquer aux élèves que face à la complexité des problèmes à résoudre, la place du « ? » est liée à la question « combien » et est une aide pour placer les grandeurs de l’énoncé dans le tableau.
Lors de cette phase, en comparant les trois propositions, on fera remarquer qu’on peut changer l’ordre des colonnes ou des lignes mais pas les positions relatives des données, particulièrement celles du « 1 » ou du « ? ».

Travail à partir de la consigne 3
Cette activité est facultative et sera proposée en fonction du temps disponible ou pourra être réalisée à un autre moment. La mise en commun des textes proposés sera particulièrement intéressante.

Les difficultés à anticiper dans la mise en œuvre de l’atelier

Différentes difficultés peuvent apparaitre pour :

- **Traduire les données du texte dans le tableau**

En particulier, le sens de lecture peut faire obstacle. Voici un exemple de problème : *Dans une journée, une girafe boit environ 40 L d’eau. Il y a 200 L d’eau qui ont été bus par des girafes. Combien sont-elles ?* « Dans une journée » qui apparaît au début du texte n’est pas une grandeur à mettre en tête de colonne. Pour « une girafe », le « 1 » ne pourra pas être placé dans la première colonne ce sera le « 40 » et le « 1 » ira au-dessus du « ? ». Il sera intéressant de faire comparer les différentes propositions pour remarquer qu’on peut changer l’ordre des colonnes ou des lignes mais pas les positions relatives des données, particulièrement celles du « 1 » ou du « ? »

- **Identifier les grandeurs en relation dans les textes proposés**

Attention, les deux domaines de grandeur n’apparaissent pas systématiquement dans la question. Par contre, on pourra faire remarquer qu’une des grandeurs apparaît toujours, celle liée à la question « combien » et qu’elle correspond à la case « ? ».

- **Repérer le sens des flèches** dans les schémas (ou tableaux) : c’est le sens qui permet de calculer les rapports, soit par une multiplication, soit par une division. On pourra insister aussi sur le fait que lorsqu’on change le sens des flèches, on inverse les opérations.
- **Calculer les rapports,** particulièrement lorsqu’il s’agit de divisions.

Ce que l’élève doit savoir faire
Comme dans l’ACP précédent, arriver à changer de registre entre les problèmes de proportionnalité en texte et les problèmes de proportionnalité en tableau, c’est-à-dire schématiser un énoncé exprimé en langage courant en un tableau, exige de ne prendre en compte que les données essentielles. Dans l’ACP21, les contraintes sont encore plus fortes puisqu’il faut tenir compte du sens des flèches et jongler entre multiplications et divisions.

Rôle de l’enseignant
Il s’agit d’amener les élèves à expliciter leurs choix et à comprendre le concept de proportionnalité dans un premier type de situations multiplicatives et à résoudre des problèmes de proportionnalité simple, procédures qu’ils pourront réinvestir très rapidement ensuite dans toutes les autres situations de proportionnalité.

Prolongements de la séance
Il est vivement conseillé de proposer systématiquement chaque jour au moins 2 problèmes à résoudre pour que les élèves puissent réinvestir ce qu’ils ont abordé en ACP et s’entrainer.

Rappels sur la résolution des problèmes de proportionnalité simple page suivante.

Les différentes procédures de résolution des problèmes multiplicatifs de type proportionnalité simple

Procédures de résolution d'un problème de proportionnalité simple : multiplication

Problème 1 : *Une rose coûte 3 €. Un bouquet contient 10 roses.* ***Combien coûte un bouquet de 10 roses ?***

Première méthode : par colonne
Utiliser les rapports de comparaison à l'intérieur d'un même domaine de grandeur (entre les lignes du tableau)

x 10

Nombre de roses	Prix en euros
10	?
1	3

x 10

Calcul vertical

1. 10 roses c'est 10 fois plus que 1 rose.
   On trouve le rapport x 10 (1^e^ colonne)
2. 10 roses coutent 10 fois plus cher que 1 rose.
   On utilise le rapport x 10 dans la 2^e^ colonne.
3. 3 x 10 = 3 → Le prix de 10 roses est de 30 €

Deuxième méthode : **par ligne**
Utiliser la fonction linéaire entre les 2 domaines de grandeur (entre les colonnes du tableau)

x 3

Nombre de roses	Prix en euros
10	?
1	3

x 3

Calcul horizontal

1. On cherche le coefficient de proportionnalité entre les 2 domaines de grandeur (2^e^ ligne).
   On trouve le coefficient x 3
2. On utilise ce coefficient x 3 dans la 1^e^ ligne
3. 10 x 3 = 30 → Le prix de 10 roses est de 30 €

L'opération à faire est une **multiplication 3 x 10 = … ou 10 x 3 = …**

Procédures de résolution d'un problème de proportionnalité simple : division partition

Problème 2 : *Un bouquet de 10 roses coûte 30 €.* ***Combien coûte 1 rose ?***

Première méthode : par colonne
Utiliser le rapport de comparaison à l'intérieur d'un même domaine de grandeur (entre les lignes du tableau)

x 10

Nombre de roses	Prix en euros
10	30
1	?

: 10

Calcul vertical

1. 10 roses c'est 10 fois plus que 1 rose.
   On trouve le rapport x 10 (1^e^ colonne)
2. 1 rose coute 10 fois moins cher que 10 roses.
   On utilise le rapport inverse : 10 dans la 2^e^ colonne.
3. 30 : 10 = 3 → Le prix de 1 rose est de 3 €

Deuxième méthode : **par ligne**
Utiliser la fonction linéaire entre les 2 domaines de grandeur (entre les colonnes du tableau)

x 3

Nombre de roses	Prix en euros
10	30
1	?

x 3

Calcul horizontal

1. On cherche le coefficient de proportionnalité entre les 2 domaines de grandeur (1^e^ ligne).
   On trouve le coefficient x 3 car 10 x 3 = 30
2. On utilise ce coefficient dans la 2^e^ ligne
3. 1 x 3 = 3 → Le prix de 1 rose est de 3 €

L'opération à faire est une **division partition** pour chercher la valeur de 1 part.
30 : 10 = ?

Procédures de résolution d'un problème de proportionnalité simple : division quotition

Problème 3 : *Les roses sont groupées en bouquets. Une rose coûte 3 € et un bouquet coûte 30 €.*
Combien y a-t-il de roses dans un bouquet ?

Première méthode : par colonne
Utiliser le rapport de comparaison à l'intérieur d'un même domaine de grandeur (entre les lignes du tableau)

x 10

Nombre de roses	Prix en euros
?	30
1	3

: 10

Calcul vertical

1. 3 € c'est 10 fois moins que 30 €.
   On trouve le rapport : 10 (2^e colonne)
2. On utilise le rapport inverse x 10 dans la 1^e colonne.
3. 1 x 10 = 10 → Le nombre de roses est de 10

Deuxième méthode : par ligne
Utiliser la fonction linéaire entre les 2 domaines de grandeur (entre les colonnes du tableau)

: 3

Nombre de roses	Prix en euros
?	30
1	3

x 3

Calcul horizontal

1. On cherche le coefficient de proportionnalité entre les 2 domaines de grandeur (2^e ligne).
   On trouve le coefficient x 3 car 1 x 3 = 3
2. On utilise le coefficient inverse : 3 dans la 1^e ligne
3. 30 : 3 = 10 → Le nombre de roses est de 10

L'opération à faire est une **division quotition** pour chercher le nombre de parts.
30 : 3 = ?